SCHULE MATHEMATIK HOCHSCHULE

MATHEMATIK-DIDAKTISCHE VORTRÄGE

an der TU Clausthal

StD. Dr. Lutz Führer
(Hameln)

"Geometrie aus der Tiefe" -
eine Einführung in die Geometrie auf dem Boden niedersächsischer Tatsachen (Sekundarstufe I)

Gerade bei neu zusammengewürfelten 7. Klassen muß immer wieder nach ästhetisch und didaktisch vertretbaren Kompromissen gesucht werden, die den behördlichen und organisatorischen Rahmenbedingungen ebenso gerecht werden wie den entwicklungs- und vorbildungsmäßigen Reifeunterschieden bei Kindern. Im Vortrag soll in loser Folge Unterrichtsmaterial zu den Standardthemen "Werkzeuggebrauch", "einfache Symmetrieabbildungen", Flächeninhalte und Winkelsummen" sowie "Gebrauch des Koordinatensystems" vorgestellt werden. Dabei werden vor allem zwei Leitprinzipien illustriert:

- Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile!

- Das mathematisch Einfache ist für Anfänger in der Regel nicht zugleich das psychologisch Einfache. Es ist folglich nach fruchtbaren Kompromissen zu suchen.

Kurzfassung zum Vortrag vom 02.12.1983.

Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik

3392 Clausthal-Zellerfeld
Erzstraße 1
(Dr. Wilfried Herget)

Geometrie aus der Tiefe

Eine Unterrichtsreihe in Klasse 7 zur Einführung in die Geometrie auf dem (einstigen) Boden niedersächsicher Tatsachen (von 1983: schulformunabhängige Orientierungsstufe)

0. Vorbemerkungen

Der Geometrieunterricht in niedersächsischen 7.Klassen findet nicht selten unter schwierigen Bedingungen statt. Die Schüler kommen aus verschiedenen Orientierungsstufen, deren Arbeit nicht immer ausreichend koordiniert wurde. Die Folge ist ein sehr heterogener Vorkenntnisstand hinsichtlich der Vokabelkenntnis, hinsichtlich des Werkzeuggebrauchs, des Formenreservoirs und des Argumentationsbedürfnisses. Hinzu kommen unvermeidliche Entwicklungs- und Sprachunterschiede, die in den letzten Jahrzehnten durch den Ausbau des höheren Bildungswesens erheblich verschärft wurden. Allein diese Voraussetzungen bringen erhebliche Differenzierungszwänge für den einführenden Geometrieunterricht mit sich. Lehrbücher und Rahmenrichtlinien reagieren auf diese Situation wenig trostreich, indem sie ein konzeptionsloses Sammelsurium von sogenannten "Grundbegriffen" zum Nachholen oder Erarbeiten verordnen. Schlägt man nur Kapitel 7.2 der RRL auf, d.h. das Geometriekapitel für Klasse 7 des Gymnasiums, so findet man Spiegelungen, Drehungen, Schiebungen und Punktspiegelungen, die auf Kreise und Vielecke synthetisch und (bescheiden) analytisch "angewandt" und auf ihre strukturellen Eigenheiten wie Invarianten, Fixelemente oder Gruppennatur befragt werden sollen. "Das Verfahren zur Begriffsbildung in der Geometrie"(???) soll dabei exemplarisch behandelt werden - z.B. für Winkel, Parallelität, Vektorbegriff. Primitivste und langweiligste Konstruktionen wie'Strecke halbieren', 'Senkrechte zeichnen', 'Winkelhalbierende konstruieren', 'Parallele zeichnen' oder 'einen Winkel antragen' sollen "durchgeführt" werden. Von den sprachlichen Schwierigkeiten der Kinder ist kaum die Rede, und die Forderung, "die Schüler zum selbständigen Begründen/ Beweisen anzuleiten", wird sofort eingeschränkt:",wenn eine entsprechende Beweisnotwendigkeit für den Sachverhalt im Unterricht erkannt und das Beweisbedürfnis geweckt worden ist". Sätze oder nichttriviale Aussagen, die ein solches Bedürfnis wecken könnten, werden nur wenige erwähnt: Flächeninhalt von Dreieck und Parallelogramm, Prismenvolumina, Winkelsumme im n-Eck. Wen wundert es, wenn ganze Schülergenerationen die Oberstufe betreten, ohne je einen geometrischen Beweis verstanden, geschweige denn selbständig konzipiert zu haben?

Der Unterricht in Kongruenzgeometrie, wie er sich traditionell für die Klassen 7 und 8 entwickelt hat, befindet sich bundesweit, ja international, in einem traurigen Zustand. Die Entwicklung zunehmend abstrakterer Forschungsgebiete in der wissenschaftlichen Mathematik brachte es mit sich, daß Geometrie - jedenfalls ihre elementaren Grundlagen - nicht länger Gegenstand des Interesses in Forschung und Lehre ist. Ihre Rolle als Sprache, also auch als intuitiver Gedankenrahmen, wurde dadurch allerdings nicht geschmälert. Diese Entwicklung unterstützte auf Schulebene Tendenzen, die einerseits auf eine schülergerechte Einführung in eine vollständige Axiomatik der euklidischen Geometrie abgezielt hatten (Stichwort: Einführung der Abbildungsgeometrie; vgl. P.Benders Zusammenfassung in ZDM 82/1) und die andererseits auf profundere Ausbildung durch frühe Abbildungsbegrifflichkeit hofften (Stichwort: Strukturwelle nach dem Sputnik-Schock von 1957). Von einer Einführung in die axiomatischen Grundlagen kam man aus pädagogischen, Zeit- und Anspruchsgründen ab, von der strukturzentrierten Betrachtungsweise auf Grund der Erfahrung, daß die Lehre vom Abstrakten zum Konkreten nicht zu transferierbarem Methodenwissen, sondern allenfalls zu wissenschaftlich aufgedonnertem, aber inhaltlich leerer Geschwätzigkeit beiträgt und die bitter notwendige Erfahrung mit den Bezugsobjekten und -phänomenen aus Zeitgründen verdrängt. So stellt sich die Lehre von den Kongruenzabbildungstypen und ihrer Gruppeneigenschaft im Unterricht vieler Länder heute als Torso dar: Es sind Anfänge, die später nirgends aufgenommen werden; Vorbereitungen ohne erkennbare Funktion; verbales Spielmaterial für "Leistungskontrollen"...

In der didaktischen Literatur sind seit einigen Jahren diese Punkte aufgegriffen worden. Man rät in zahlreichen Artikeln zu mehr Anwendungsorientierung und zu mehr Konkretion, um den arbeitsfähigen Erfahrungsschatz der Kinder auch auf den höheren Schulen aufzuweiten. Trotz fortwährender Plädoyers für einen durchgehenden und intensiven Geometrieunterricht ist das Problem, eine gedankliche Linie, für die Kinder erkennbar, aufzuzeigen und durchzuhalten, ebensowenig gelöst wie die Probleme einer pädagogischen Gewichtsetzung im Geometrieunterricht, einer überzeugenden Verbindung mit den zeitlich und organisatorisch benachbarten Unterrichtsgebieten, einer sinnvollen Anspruchsdifferenzierung und Individualisierung oder das einer spiraligen Vertiefung von Klasse 9 bis 13.

Ohne diese Probleme "mal eben schnell" lösen zu können oder wollen, mußte ich nach einem vertretbaren Kompromiß für den Geometrieunterricht in einer neu zusammengewürfelten 7.Klasse suchen. Mir schienen folgende Leitlinien besonders aussichtsreich:

- In den Klassen 5 und 6 dürfte nach meiner Erfahrung nur wenig reizvolle Geometrie behandelt worden sein. Neugier und Begeisterungsfähigkeit der Kinder sollten genutzt werden.
- Das Wort von der paradigmatischen Geometrie, pythagoreeisches Gedankengut, an Platons Akademie verewigt und in der Suche nach einfachen, ästhetisch befriedigenden Gestaltregeln Muster jeder wissenschaftlichen Bemühung, soll Kindern verdeutlicht und nahe gebracht werden - Kindern, weil es Erwachsenen oft genug an der notwendigen naiven Einfühlung fehlt.
- Die langen und tiefen kulturellen Wurzeln der Geometrie rechtfertigen eine aspektreiche, vielschichtige Darstellung, die historische und fachübergreifende Beziehungen über das Einschleifen von positivem (Vokabel-) Wissen stellt.
- Die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie erreichen keine arbeitsfähige Bedeutsamkeit, wenn sie als abgehobene Abstraktionen verabfolgt werden. Sie sollten vielmehr aus der Vielfalt realer und phantastischer Vorstellungswelten als invarianter und nichttrivialer Kern abgelöst werden.
- Die wichtigsten Aufgaben des Geometrieunterrichts in der Mittelstufe sind formalbildender Art: Es geht um das Sehen, Beschreiben und Argumentieren; der "Stoff" kann, bis auf bescheidene Ausnahmen, getrost vergessen werden.
- Nicht alles ist für alle wichtig.
- Die Beschreibung der RRL für den Geometrieblock in Klasse 7 ist m.E. inhaltlich und pädagogisch unzureichend. Die Themen "Werkzeuggebrauch", "Symmetrien/Symmetrieabbildungen", "Flächen/Winkel" und "Koordinaten" sind in einen sinnvollen Zusammenhang zu bringen, der allmählich wachsende argumentative Anforderungen stellt.
- Es ist ein kinderfeindlicher Fehlschluß, strukturell ärmere Gegenstände für "einfacher" zu halten. Sinnarme Abstrakta erfordern ein erhebliches Maß an geistiger Umstellung. Wird sie nicht genügend behutsam vorbereitet, so müssen sich Kinder in eine 'Unterrichtshaltung' begeben, ihre Interessen- und Erfahrungswelt verleugnen und eine nicht assimilierte Spezialsprache imitieren, deren Bezugsrahmen nicht über Unterrichtsstunden in Mathematik hinausreicht. Anwendungsorientierter Unterricht begegnet dieser Schwierigkeit nicht, wenn er die stark beschränkte Gegenstandswelt der üblichen Kongruenzgeometrie der RRL lediglich illustrativ kaschiert. Es bleibt - auch für normale Kinder - sinnlos, wenn der Abbildungszirkus errichtet wird, um Dreiecke zu dressieren! "Leistungen" sind in diesem Rahmen Mimikrierfolge, und die Maßstäbe sind autoritäts- , nicht sachgebunden.

Im Vortrag wurden zahlreiche Materialien aus dem Unterricht vorgestellt. Da sehr viel mit Bildfolien und Zeichenübungen - freihändig und gebunden - unterrichtet wurde, kann hier nur eine grobe Skizze vermittelt werden. Wesentlich ist nicht das spezielle Material; es liegt mir vielmehr daran, eigene Sammlungen anzuregen und zu komplexeren Übungen, Freihandzeichnungen und Beziehungsreichtum anzuregen. Hobbies, Interessen und Alltagserfahrungen des Lehrers können in außerordentlich fruchtbarer Weise eingebracht werden.

1. Homogenisierung des Werkzeuggebrauchs

Ich begann die erste Stunde in der neuzusammengestellten Klasse mit folgender Frage:

"Wer kann mir ein regelmäßiges Sechseck an die Tafel zeichnen?"

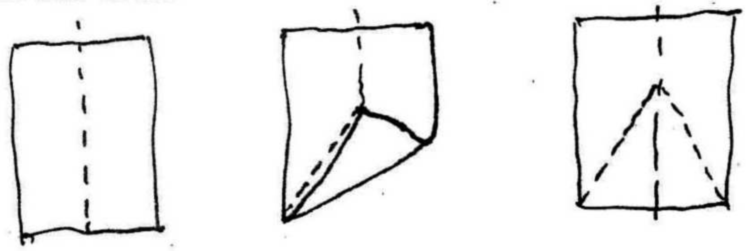
Diese Figur schien mir komplex genug, um etwas über die Vorkenntnisse der einzelnen Schüler zu erfahren. Um die Kinder zum Reden zu zwingen, hatte ich alle Hilfsgeräte aus dem Klassenraum geschafft: sie sollten sagen, wie es geht!

Das regelmäßige Sechseck ist überdies von besonderer historischer Bedeutung. Es findet sich auf dreitausend Jahre alten ägyptischen Reliefs und Malereien. Und H.Hankel hat vor einhundert Jahren die Vermutung aufgestellt, daß der Satz über die Winkelsumme im Dreieck aus dem Sechs-Speichen-Rad entstanden ist. Schließlich hat diese Figur enge Beziehungen zu Kreisen und Parkettierungen (vgl.Wagenscheins Aufsatz "Die Entdeckung der Axiomatik" in MU 74/1).

Kein Schüler meiner Klasse nannte die bekannte Kreiskonstruktion. Die Freihandversuche gingen regelmäßig von einer Sechseckseite aus, knickten dann nach Augenmaß oder nach Vergleich mit rechten Winkeln und Augenmaßabschätzung für den Restwinkel seitlich ab, um zu recht enttäuschenden (großen) Figuren zu kommen. Noch in der ersten Stunde schlug ich deshalb vor, ein regelmäßiges Sechseck aus Papier herzustellen. Auch das konnte niemand. Hilfsfrage:

"Wie kann man aus diesem Din-A4-Blatt ein möglichst großes regelmäßiges Dreieck falten?"

Mit einiger Einhilfe konnte ein solches Dreieck wenigstens über der Schmalseite des Blattes errichtet werden. Dabei mußte die Achsensymmetrie und das Einpassen der Grundseite von einer Ecke bis zur Faltachse sprachlich bewältigt und als Grundidee formuliert werden. Das regelmäßige Sechseck erhielten wir dann durch Einschlagen der drei "Zipfel" zur Mitte des gleichseitigen Dreiecks hin.



Zu Hause sollten die Kinder ein regelmäßiges Sechseck mit 10 cm Kantenlänge sauber zeichnen (etwa indem sie ein passendes Papiersechseck auszeichnen). Als Ergebnis zeigte sich zu Beginn der zweiten Stunde, daß mehr als ein Drittel der Schüler inzwischen die Kreisteilungskonstruktion kannten. Aber niemand wußte sie zu erklären, und an der Tafel (mit dem ungewohnt großen Zirkel) ging die Sache natürlich nicht genau auf!

Es reichte mir an dieser Stelle, daß die Kinder sahen, daß solche Tricks "eigentlich" begründet werden müßten. Vorerst blieb es ihnen freigestellt, mit welchem Verfahren sie die regelmäßigen Sechs- und Dreiecke der nächsten Zeit herstellen würden. Was kann man an den Sechsecken entdecken?
Wir sprachen über

- ägyptische Reliefs (warum 6-Speichen-Räder?)
- die Figuren, die auf dem auseinander gefalteten Din-A4-Blatt noch zu entdecken sind, nachdem man unsere Sechseck-Faltung durchgeführt hatte
- noch größere gleichseitige Dreiecke aus einem Din-A4-Blatt
- die Verschmelzung von gleichseitigem Dreieck und seinem auf die Spitze gestellten Pendant zum Davidstern, Siegel Salomos oder Hexagramm: göttliche Weisheit und bodenständiger Reichtum waren nach spätmittelalterlicher Darstellung die Gaben dieser ersten Könige des Staates Israel
- die vier Elemente des aristotelischen Weltbildes: das nach oben strebende Feuer (gls.Dreieck steht auf der Basis), die oben befindliche Luft (gls.Dreieck steht auf der Basis, Spitze horizontal durchgestrichen), das nach unten strebende Wasser (gls.Dreieck auf der Spitze) und die unten befindliche Erde (gls.Dreieck auf der Spitze, horizontal durchgestrichen)
- die Verschmelzung dieser Weltbaussteine und -prinzipien im Hexagramm als Symbol des göttlichen Universalprinzips, d.h. als Symbol des Steins der Weisen in der mittelalterlichen Alchemie (die von Paracelsus, Descartes, Leibniz, Newton, Goethe usf. noch ernst genommen wurde!)
- das Zerschneiden eines Hexagramms in vier Teile, die man zum gleichseitigen Dreieck umlegen kann

Es gab schon hier genug zu entdecken, zeichnen und erzählen: das lückenlose Aneinandergrenzen mehrerer regulärer Sechsecke auf dem entfalteten Din-A4-Blatt, ein Judenstern in der Fassade eines Hauses in unserer Altstadt, Blumenmuster bei der Zirkelkonstruktion, ineinandergeschachtelte Hexagramme, Winkel von 30°, 60°, 90°, 120° usf.

*

Es ist klar, daß die analoge Frage nach dem regelmäßigen Fünfeck und Pentagramm früher oder später auf weitere Winkelgrößen führen mußte. Wie Fausts Erlebnis mit Mephisto belegt, muß man Pentagramme sorgfältig zeichnen - sonst wird man vom Teufel geholt!

Um die Kinder <u>viele</u> Winkel zeichnen zu lassen, sollten sie eine komplexere Spiralfigur zeichnen: Auf einem Arbeitsblatt befand sich - schwach sichtbar - ein großer, in 24 Segmente unterteilter Kreis, in den von Nord bzw. Südwest her fortlaufend Strecken mit gewissen Neigungswinkeln einzutragen waren bis die Zielfigur sichtbar würde (Hausaufgabe). Es zeigte sich an der begeisterten Arbeit der Kinder, daß solche umfangreicheren Übungsfiguren mit Schließungscharakter wirklich zum Üben verlocken.

Wir sprachen dann über das Fünfeck und Pentagramm:

- Über den Bezug der 360^{o}-Teilung zum Lunisolarjahr und zur Hexagesimalteilung des Zifferblattes
- über den gefalteten Knoten
- über die Herstellung aus einem Din-A4-Blatt (Näherung)
- über Dürers Entdeckung am Kreisblumenmuster (" ; wieso ist die Symmetrie in dieser natürlichen Figur gestört???)
- über Spiralen in der Natur
- über Maßwerke, die den goldenen Schnitt in irgendeiner Form (zu) enthalten (scheinen)
- über das gotische Meisterdiagramm, das angeblich alle wesentlichen Maßverhältnisse gotischer Kathedralen abzuleiten gestattet und Teil der Meisterprüfung an Bauhütten gewesen sein soll
- über die Arbeitsmoral bei Handwerkern im Mittelalter und das Verhältnis von Geld und Ansehen
- über das Wort "Drudenfuß", über die Magie des Pentagramms, über Luthers Rosenwappen

An Beispielen aus alten Vermessungshandbüchern und -karten, aus Astronomie und Geodäsie wurde die Bedeutung genauer Winkelmessungen für Größenbestimmungen von relevanter Bedeutung illustriert (Meridianvermessung, Mondabstand usw.).

Es dürfte schon deutlich geworden sein, daß die zahlreichen Standardvokabeln und -zeichentechniken als Mittel zum Zweck - quasi nebenher - benutzt und nicht als Betrachtungsgegenstand des Unterrichts thematisiert wurden. Der Umgang mit dem Zirkel z. B. wurde (zu Hause) geübt, indem eine der Figuren aus Baravalles Buch "Geometrie als Sprache der Formen" hergestellt wurde (vgl. Anhang). Ein paar Schüler stellten sogar alle drei Figuren der linken Spalte her. (Die unterteilten kleinen Trägerkreise standen auf Arbeitsblättern zur Verfügung.) Nach 12 Unterrichtsstunden hatten wir die Winkel am rgl. Sechseck, gleichs.Dreieck, Rechteck, Vollwinkel, rechte, spitze, stumpfe, gestreckte Winkel, Dreieckstypen, Raute, Parallelogramm, Vielecke, Kreis, Strecke, Strahl, Gerade, Diagonale, Radius, Durchmesser, Ecke, Seite, Basis, Schenkel, Scheitelpunkt, Mittelpunkt, Mittelsenkrechte, Spiegelung und -achse, Fixpunkt, Kreisblumenmuster, Konstruktionen mit der

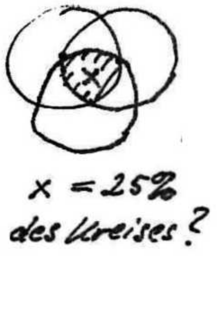
Zweikreisfigur, Auffinden eines Kreismittelpunktes, Winkelkonstruktion von Fünf- und Siebeneck, Spiegelungskonstruktionen und Drehsinn genutzt, geübt und besprochen. Dabei ging es nicht um abfragbare Definitionen, sondern um gewohnheitsmäßiges Benutzen dieser Namen oder Techniken an der richtigen Stelle. Was wichtig ist, würde ohnehin noch oft genug wieder auftauchen und den schwächeren Schülern auch noch zur Gewohnheit werden. Eine Leistungskontrolle zeigte aber schon an dieser Stelle breites und arbeitsfähiges Grundwissen bei allen Schülern der Klasse - ein Stand, der deutlich über den Kenntnissen am Anfang der Unterrichtsreihe lag. Der Zeitbedarf ist insofern erträglich ausgefallen, als im Unterricht sehr viel mit Folien und Freihandskizzen gearbeitet wurde. Sauber zeichnen muß schließlich jeder für sich; das Zuschauen bringt - wie beim Schwimmen - wenig, und Ziel des Geometrieunterrichts ist eine argumentationsfähige Vorstellung von Figuren und deren Beziehungen; folglich ist das saubere Zeichnen Handwerkszeug, nicht Gegenstand, Voraussetzung (bzw. häusliche Aufgabe), nicht Ziel.

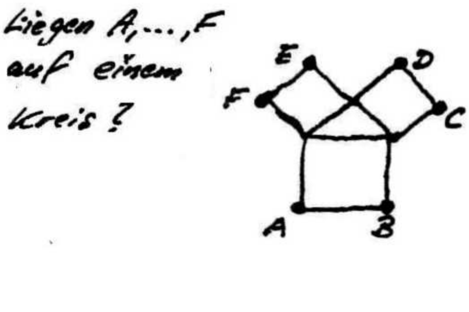
2. Symmetrie(abbildungen)

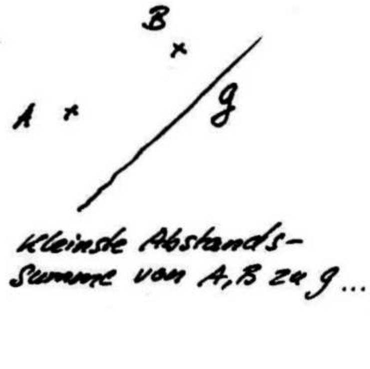
Material zu Zeichenübungen und Betrachtungen findet man leicht in den Schülerbüchern. Bilder mit Fastsymmetrien erwiesen sich für Gespräche über Symmetriecharakteristika als sehr viel ergiebiger. Man findet solches Material leicht in Gemälden, Fotos von Gesichtern (die "symmetrisiert" wurden, d.h. eine Gesichtshälfte wurde auf die andere gespiegelt: das Gesicht wirkt gespenstisch), in Wappen oder Emblemen usf. Eine Folie des Taj Mahal wurde mehrfach umgeklappt und verdeutlichte so, daß kleinere Asymmetrien die notwendigen Merkmale zur Orientierung darstellen...

Wesentlich über diese rein phänomenologische Betrachtungsweise hinaus geht die konstruktive Verwendung von Symmetrien und die heuristische Nutzung der Symmetrisierung:

- Rosetten mit Schablonen zeichnen
- Verkettungen am Kaleidoskop (Winkelspiegel) studieren
- Billardprobleme
- mögliche Symmetrien von Drei-, Vier- und Fünfecken
- Lösung einfacher Aufgaben wie







3. Winkel- und Flächensätze

Das Thema "Parkette" war im Verlauf der Unterrichtsreihe schon mehrfach angeklungen. Es wurde nun etwas systematischer behandelt. Dazu sollten zunächst aus kongruenten gleichseitigen, dann gleichschenkligen und schließlich fastsymmetrischen Dreiecken Pflasterungen auf den Arbeitsprojektor gelegt werden. Bei den fastsymmetrischen Dreiecken erwies sich eine genaue Beschreibung der nötigen Halbdrehungen als unumgänglich, wenn schwächere Schüler den Ideen der besseren am Projektor folgen sollten. Markiert man dabei die drei Innenwinkel mit jeweils verschiedenen Farben, so entsteht an den Kreuzungspunkten des Parketts jeweils die doppelte Summe der Innenwinkel als Vollwinkel. Man "sieht" also zwanglos den Satz über die Winkelsumme am Dreieck.

Teilfiguren sind dabei immer wieder Parallelogramme. Legt man eine passende Rechteckspflasterung darüber, so erkennen die Schüler ebenfalls zwanglos die Sätze über Flächeninhalte von Dreiecken, Parallelogrammen und besonderen Trapezen. Um diese Sätze stets zur Verfügung zu haben, muß geklärt werden, ob solche Parkette stets erzeugbar sind: man muß die Rolle des Wörtchens "passend" oben (Streifenbreite = Höhe) und der Halbdrehungen durchschaut haben.

Weitere Pflasterungen wurden besprochen und hergestellt:

- aus Trapezen, anderen Vielecken
- aus (nichtregulären!) Fünfecken
- Straßenpflastertypen
- perspektiv gesehene Pflasterungen aus regelmäßigen Sechsecken
- Idee der räumlichen Packungen

Auf Folien zeigte ich den Schülern besonders schöne Parkette (Escher-Bilder), wilde Parkette und ornamental ausgeschmückte.

Das Thema ist natürlich - wie die zuvor genannten - keineswegs originell. Auch in zahlreichen Schulbüchern wird es in diesem Zusammenhang dargestellt (vgl. etwa die Neuauflage von Geometrie I aus der Lambacher/Schweizer-Serie). Weniger bekannt dürfte sein, daß J.Kepler sich ausführlich mit Parkettierungen befaßt hat: Im zweiten Kapitel seiner Weltharmonik geht es um "Kongruenzen" - und das sind für Kepler nichts anderes als Parkettierungen. "Unter der Kongruenz versteht er die Eignung eines regelmäßigen Vielecks, mit gleichen oder anderen einesteils die Ebene ganz oder teilweise lückenlos auszufüllen, anderenteils mit ihnen geschlossene Raumgebilde, d.h. Körper zu erzeugen." (E.Bindel:"Harmonien im Reiche der Geometrie",Stuttgart,1964,Einl.)

Es liegt nahe, daß dieses Thema im Unterricht ausführlicher besprochen wurde: Keplers Triumph, als er geglaubt hatte, die Planetenabstände durch die Verschachtelung der regelmäßigen Körper erklären zu können, und seine Enttäuschung und Zähigkeit nach Entdeckung des Widerspruchs zu den Beobachtungsdaten Brahes...

Gerade in diesem Zusammenhang leuchtete den Kindern eine Ahnung vom wissenschaftlichen Streben nach harmonischer Aufklärung von Zusammenhängen, von Redlichkeit gegenüber den Beobachtungswahrheiten und vom Kompromiß zwischen harmonischer Symmetrie und orientierender Asymmetrie in der Natur ein. Die Fastsymmetrie scheint der eigentliche Motor menschlicher Wißbegier zu sein!

Es braucht hier nicht ausgeführt zu werden, daß die nun erworbenen Rechenhilfsmittel ausgiebig in Aufgaben genutzt und von der Einbettung in Parkette abgelöst wurden. Ich kann hier auf bekannte Kopfrechenübungen an Tangram-Figuren (die auf dem Projektor vorgegeben werden) und auf P.Eigenmanns Sammlung "Geometrischer Denkaufgaben" verweisen, die eine Fülle variantenreicher Rechen-, Zeichen- und Konstruktionsmöglichkeiten im Zusammenhang mit den Sätzen über Flächeninhalte und Winkelsummen anregen.

4. Das Koordinatensystem

Obwohl die negativen Zahlen offiziell noch nicht eingeführt waren, hielt ich es für reizvoller (weil scheinbar für die Schüler etwas Neues kam), sofort das volle 'Koosy' einzuführen. Grundidee war die Herstellung des Wandflieses an der Treppe zum Palast von Persepolis: Wie kann der Baumeister diesen Entwurf dem König und anschließend den Handwerkern erklärt haben? Die Steinplatten waren offensichtlich mühsam zu bearbeiten und zu justieren. Es dürfte nahe gelegen haben, eine oder mehrere Schablonen anzufertigen und in einen Rasterplan der großen Seitenwand (etwa durch die Quaderkanten markiert) einzupassen. Will man die Lageverschiebung der Schablone an der großen Wand beschreiben, so kommt man ganz zwanglos auf Formulierungen wie "3 nach rechts und 2 Stufen nach oben" usw. Legt man Rechtecksschablonen (sie passen am besten zueinander) in großer Zahl und in verschiedenen Maßen als Packen auf den Projektor, so entsteht ein Liniengewirr, das man "natürlich" durch Abzählen horizontal und vertikal ordnen wird... Die Schüler fanden das "kartesische Koordinatensystem" als natürliche Selbstverständlichkeit - auch die negativen Markierungen nach der jeweils "anderen Seite". Es machte ihnen auch Freude, Objekte wie Eschers Tiere in positiver oder negativer Richtung zu verschieben, um Parkette nichttrivialer Art zu erzeugen (vgl. Anhang).

Die Nutzung von Koordinaten zur Lagebeschreibung wurde an zahlreichen Bildern illustriert:

- Dürers Studien "Menschenköpfe im Quadrat"
- Plan der Stadt Mannheim nach dem Wiederaufbau 17oo (oder auch Manhattan)
- Ornamente
- Schaubilder zur quantiativen Korellation zweier Größen (etwa Körpergröße und Mathematiknote oder Satzlänge und Wortlänge bei verschiedenen Schriftstellern)

Die notwendigen Lokalisierungsübungen wurden an Schleifenbahnen von Planeten vorgenommen: Auf eine drehbar mit der Grundfolie verbundene Deckfolie wurde ein Rädchen mit Führungsrille gesteckt. Auf dem Rädchen klebte ein Streichholz als Zeiger. Ein Faden wurde als Zugseil benutzt, während die Deckfolie über die Grundfolie (mit Koosy) gedreht wurde. Dabei zeigte der Streichholz eine Epizykelbahn an, die ein Schüler an der Tafel festhielt. Nach Ausschalten des Projektors blieb nur diese Bahn sichtbar an der Tafel. Ich zeigte den Schülern nun Darstellungen der von der Erde sichtbaren Bahnen von Jupiter, Neptun und dem Halley-Kometen. Die anschließenden Ausführungen zur Ptolemäischen Epizykeltheorie stießen nun natürlich auf große Bewunderung. Daß in diesem Zusammenhang durchaus auch aktuelle Neuigkeiten zu erwarten sind, erhellte ein Hinweis auf die Forschungsaufgaben der IRAS-Sonde, die noch unterwegs ist, um einen etwaigen 10. Planeten zu suchen, der Widersprüche in den Bahndaten des Neptun klären könnte. (vgl. S.Drake/C.T.Kowal:"Galileis Beobachtungen des Neptun", Spektrum der Wiss., 81/2, S.76 ff)

Es schien mir notwendig, die Schüler auf diese Verwendung von Koordinatensystemen aufmerksam zu machen, denn sie wurden tatsächlich im Zusammenhang mit Raum- und Flächenkurven und mit astronomischen Forschungen entwickelt:

- Ptolemäos gilt als Erfinder der geographischen Koordinaten (und der Trigonometrie).
- Das "kartesische Koordinatensystem" stammt von Newton, der es beim Studium der Kurven dritter Ordnung erstmals systematisch benutzte und zu Ehren Descartes so nannte (Descartes und Fermat zeichneten den rechten Winkel nicht aus und trugen die Ordinaten stets nur als Stäbe über einer horizontalen Abszissengeraden auf; dabei nutzten sie auch die negativen Zahlen nicht).
- Galileis Beobachtungen des Neptun waren nur möglich, wenn er seinem Beobachtungsfernrohr ein geeignetes Koordinatengitter anheftete (s. die Arbeit von Drake/Kowal, oben), um so hinreichend genau Winkelabstände schätzen zu können.

An dieser Stelle gab ich mir wiederum viel Mühe, die Schüler über die tatsächliche Relevanz der von ihnen zu erlernenden mathematischen Konzepte aufzuklären. Dies kann nach meiner Erfahrung viel eher mit Geschichten aus der Geschichte der Wissenschaften erreicht werden als durch einen - aufgrund der bescheidenen Kenntnisse - notwendig vordergründigen Anwendungsbezug.

5. Abschließende Bemerkungen

Unterricht, wie er oben umrissen wurde, kann auf dem Papier noch weniger überzeugen als im illustrierten Vortrag. Die geschilderte Unterrichtsreihe dauerte insgesamt 35 Unterrichtsstunden und deckte weit mehr ab als in den RRL gefordert. Die Ergebnisse der Klassenarbeiten (2) zeigten keinerlei Ausfälle. Alle Schüler verfügten über ein - in meinen Augen - ausreichendes Wissen und Können. Die historisch-kulturellen Gesichtspunkte wurden von vornherein als Zusatzangebot ausgegeben und nicht überprüft. Die Beteiligung und Haltung der Schüler im Unterricht war durchweg erfreulich. Die ästhetischen Gesichtspunkte fielen vor allem bei Mädchen oft auf fruchtbaren Boden: farbige Zeichnungen und Zusatzarbeiten bewiesen es.

Mehr als es in diesem Umdruck deutlich werden konnte, haben die Schüler einen nachhaltigen Eindruck vom ganzheitlichen Beziehungsreichtum der elementaren Geometrie mitgenommen. Dieser Aspekt stand nicht zufällig an der Wiege der Wissenschaftskultur bei den Pythagoreern und im Zentrum des Quadriviums als Vorschule aller Universitätsstudien. Die Regelmäßigkeiten der sichtbaren Welt sind vermutlich die unversiegbaren Quellen aller wissenschaftlichen Bemühungen um Erkenntnis "einfacher" Gesetzmäßigkeiten hinter den Einzelphänomenen. In diesem Sinne kann Elementargeometrie als zentrales Thema des Mathematikunterrichts gerechtfertigt werden - auch,wenn nicht mehr in ihre wissenschaftlichen Grundlagen eingeführt werden darf.

Es wäre zu wünschen, daß uns Lehrern von Behördenseite mit Materialien und Hinweisen ernsthafter geholfen wird, unseren Auftrag an allgemeinbildenden Schulen wahrzunehmen. Es ist geradezu ungeheuerlich, wie in RRL mit der kulturhistorischen und erkenntnismäßigen Begründung des Geometrieunterrichts umgegangen wird und wie diese Aufgabe dem Einzelkämpfer zugeschoben wird.

Anregungen zur literarischen Ergänzung:

A) Ganzheitlicheres Aufgabenmaterial:

1 P.Eigenmann: Geometrische Denkaufgaben, Klett, 2.Aufl.,1981
2 H.v.Baravalle: Geometrie als Sprache der Formen, Stuttgart,3.Aufl., 19 (teuer)
3 J.Kühl: Einfache geometrische Aktivitäten, Lütjensee(IPTS),1976
4 H.Besuden: Entdeckungen am Parkettmuster, mathematiklehrer,1982/2,15 ff
5 H.J.Bentz,W.Striebl: Materialien zum Geometrie-Unterricht der Sek.I, Freiburg (Herder),1981
6 H.R. Jacobs: Mathematics - a Human Endeavor, San Francisco,1970(preisw.)
7 " : Master Sheets to 'Geometry',S.Franc.(Folienvorlagen zum Geometry-Lehrbuch desselben Autors)(sehr teuer),1974
8 " : A Teacher's Guide to....,S.Fr.,1974 (Lehrerhandbuch dazu)
9 A.Wyss,E.Bühler,...: Lebendiges Denken durch Geometrie, Stuttgart, 2.Aufl.,1978
10 W.D.Murray,F.J.Rigney: Paper Folding for Beginners, 2.Aufl.,New York, 1960 (preiswert)
1 K.P.Müller: Raumgeometrie in Photographie und Kunst, math.didact.,82/1

B) Geschichtliches:

12 B.L.v.d.Waerden:D.Pythagoreer, Zürich, 1979 (sehr teuer)
13 A.Witting,M.Gebhardt: Beispiele zur Geschichte der Mathematik, 2.Teil, Leipzig, 1913 (Dürers Konstruktionen der Vielecke)
14 L.Hogben: Die Welt der Mathematik, Stuttgt.,197o (preisw.)
15 U.Troitsch,W.Weber: Die Technik, Braunschweig,1982
16 E.Bruton: Die Welt der Uhren, London, 1979
17 R.T. Gould: The Marine Chronometer - its Hist.and Devel.,London,1923
18 I.Schneider: Der mathematische Praktiker im See-, Vermessungs- und Wehrwesen vom 15. bis zum 19.Jh., Technikgeschichte,37(197o),21o-242
19 S.Drake,C.T.Kowal: Galileis Beobachtungen des Neptun, Spektrum der Wiss.,81/2, 76 ff.

C) Mittelalter

2o) R.Assunto: Die Theorie des Schönen im Mittelalter, Köln,1963/1982
21) E.Kaiser: Paracelsus, Reinbeck, 1969 (Taschenbuch)
22 O.v.Simson: Die gotische Kathedrale, Darmstadt,3.Aufl.,1979
23 H.Hahn: Die frühe Kirchenbaukunst der Zisterzienser, Berlin,1957
24 W.Hansen: Die Ritter - eine Reportage ü.d.Mittelalter, Pfaffenhofen, 1976 (preiswert)

D) Magie, Symbolik: (vgl. auch die großen Enzykl.von Brockhaus oder Meyer!)

25 Herder-Lexikon der Symbolik , Freiburg, 1979
26 H.Kückelhaus: Urzahl und Gebärde, Berlin, 1934
27 M.Lurker: Der Kreis als Symbol, Tübingen, 1982
28 R.Bernoulli: Zur Symbolik geometrischer Figuren und Zahlen, Eranos Jahrbuch, Zürich,2(1934),37o-415
29 S.Holroyd: Zaubersprüche und Zahlenmagie, Fft.1978 (Taschenbuch)
3o N.Powell: Die Wissenschaft der Alchimisten, Fft.198o (")

E) Materialien aus der Waldorf-Bewegung:

31 R.Steiner: Naturbeobachtung, Mathematik, wiss.Experiment und Erkenntnisergebnisse vom Gesichtspunkt der Anthroposophie, Dornach, 1972
32 A.Strakosch: Einf.i.d.Geo.d.übende Anschauung,Stuttgt.,1962
33 L.Locher-Ernst: Urphänomene der Geometrie, 2.Aufl.,Dornach,198o
34 " : Math.Meditationen, Winterthur,1962
35 E.Bindel: Die geistigen Grundlagen der Zahlen, Stuttgt.,4.A.,198o
36 " : Harmonien im Reiche der Geometrie (in Anlehnung an Keplers Weltharmonik), Stuttgt.1964

37 H.v.Baravalle: Die Geometrie des Pentagramms und der Goldene Schnitt, Stuttgart, 3.A.,1969
38 " : Die Erscheinungen am Sternenhimmel, Stuttgt.,o.J.
39 " : Darstellende Geometrie, Stuttgart, 2.A.,1980
40 " : Perspektive, Bern, 1952
41 O.Whicher: Projektive Geometrie , Stuttgart, 1970
42 H.Börnsen: Das geheime Gesetz des Siebenecks, Stuttgart,1965
43 G.Unger: Meditationen am Pentagon-Dodekaeder, Stuttgt.,2.A.,1975
(siehe auch 2 , 9)

F) Didaktik der geometrischen Propädeutik:

44 P.Treutlein: Der geom.Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts an unseren höheren Schulen, Leipzig, 1911
45 A.Höfler: Didaktik d.math.Unterr.,Leipzig, 1910
46 E.H.Timerding: Die Erziehung der Anschauung, Leipzig, 1912
47 W.Lietzmann: Experimentelle Geometrie, Stuttgart, 1959
48 H.Scharrelmann: Produktive Geometrie, Braunschweig, 1922
49 F.Behrend,A.Morgenstern: Form und Abbildung, Breslau,1932
50 Ph.Maennchen: Methodik des math.Unterrichts, Fft.,1928
51 B.Petermann/K.Hagge: Gewachsene Raumlehre, Freiburg, 1935

G) Didaktik der geom.Grundlagen:

52 E.Salkowski: Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geom. Unterrichts, Leipzig, 1924
53 " : Neue Ziele und Wege des Geometrie-Unterrichts, Fft.,1936
54 J.Hjelmslev: Geometrische Experimente, Leipzig, 1915 (Beiheft zur ZfMNU)
55 K.H.Hürten: Die Geometrie der Abbildungen und Figuren, in:Handb. der Schulmath.,Bd.3 (Hrsg.:Wolff), 1967
56 P.Bender: Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion, in ZDM 82/1 (Histor.Überblick)

H) Klassischer Aufgabenbestand:

57 M.Kröger: Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung und mit besonderer Berücksichtigung neuerer Theorien, Hamburg,1896 (umfaßt auch alle neueren Aufgaben zur Abbildungsgeometrie!)
58 J.Petersen: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, Kopenhagen, 1879
59 B.Wiese, W.Lichtblau: Sammlung geometrischer Konstruktions-Aufgaben zum Gebrauch an Seminarien, Hannover, 1900
60 B.Kerst: Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben,Leipzig,1916
61 A.Schülke: Welche Ziele hat der Unterricht in der Geometrie? ZfMNU 39(1908),442-447 (Dort steht, warum der heute noch verbreitete Unterricht mit Schwerpunkt Konstruktionsaufgaben überholt ist!)

I) Geometrie und Psychologie, insbes.opt.Täuschungen:

62 Handbuch der Psychologie, Bd.I.1 (Hrsg.W.Metzger),2.A.,Göttingen, 1974
63 W.Metzger: Die Gesetze des Sehens, 3.A., Fft.,1975
64 K.Gentil: Opt.Täuschungen, Köln, 1962
65 H.Schober, I.Rentschler: Opt.Täuschungen in Wiss.u.Kunst, München, 1972
66 G.A.Miller: The Magical Number Seven...,Psych.Review 63(1956),81 ff.
67 E.Rausch: Struktur und Metrik figural-opt.Wahrnehmung, Fft.,1952

J) Mathematik und Kunst:

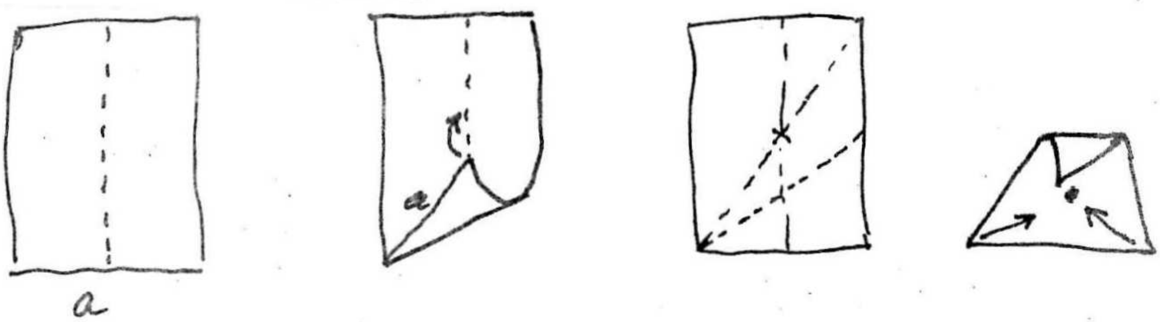
68 H.Weyl: Symmetrie, Basel, 1955
69 E.Schröder: Dürer, Kunst und Geo., Basel, 1980
70 O.Hagenmaier: Der Goldene Schnitt, Ulm, 1949
71 G.Wolff: Mathematik und Malerei, Leipzig, 1916

72 H.E.Timerding: Der Goldene Schnitt, Leipzig, 1924
73 M.Ghyka: The Geometry of Art and Life, New York, 2.A., 1977
74 W.Fucks: Nach allen Regeln der Kunst, Fft., 1973
75 L.d.Vinci (Hrsg. A.M.Brizio u.a.), 3 Bde., Stuttgart/Zürich, 1981

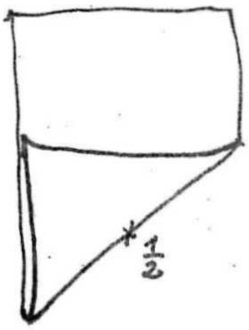
K) Sonstiges, insbes. Raumgeometrie:

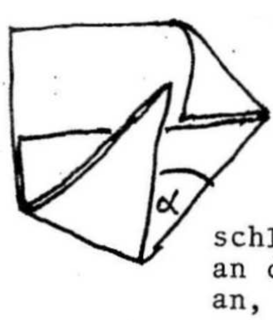
76 B.Artmann: Aktivitäten am regelmäßigen Fünfeck, MU 82/4
77 E.Schröder: Das macht Pythagoras verlegen, Alpha 77/6 bzw. 78/1
78 C.McGillavry: The Periodic Drawings of M.C.Escher, Amsterdam, 1965
79 E.Quaisser, H.-J.Sprengel: Räuml.Geometrie, Bln.(DVW), 1981
80 D.Kahle: Das isoperimetrische Problem bei Vierecken, MNU 35(1982), 273 ff.
81 E.Hodi(Hrsg.): Math.Mosaik, Köln, o.J. (insbes.ab S.158:Parkette)
82 d'A.W.Thompson: On Growth and Form, Cambridge, 2 Bde., 1942
83 H.U.Keller (Hrsg.): Das Himmelsjahr 1983, Stuttgart, 1972
84 B.Artmann: Elementargeometrie und ihre Didaktik, Skript, TU Darmstadt, WS 1978/79, Nachtrag 1980
85 W.Gilde: Gespiegelte Welt, Leipzig, 1979
86 L.Tschampel: Über Symmetrien ebener n-Ecke, PM 83/1
87 A.B.Bolt, J.E.Hiscocks: Machines, Mechanisms, and Mathematics, London, 1970 (Math.for the Majority)
88 H.Sieber: Über Drehungen um 60°, in MU 65/3
89 Mathematik in der Schule, Heft 7/8, 1982 (einige Artikel z.E'geom.)
90 K.Ilgner: Die Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens in den Klassen 1-10, MiSch 1974/12, 1979/10-11
91 K.Laußermeyer: Isometrische Zeichnungen, PM 1981(?), S.225 ff.
92 W.Semrau: Die Erziehung zum räumlichen Zeichnen, Zeichnen 81/1, 28ff.

Falten eines Sechsecks:



Falten eines (fast) regelmäßigen Fünfecks:





schlägt der linke Zipfel an das Dreieck rechts oben an, so ist $\alpha \approx 36°$